Лабораторная работа №3   
Решение матричных игр методом минимакса

Рассмотрим пример применения алгоритам решения матричных игр методом минимакса.

Имеется две конкурирующие компании (A и B). Компания B ведет переговоры с организаторами каждого из трех проектов на предмет инвестирования. Задача компании В – добиться положительного результата переговоров. Компания А ставит своей целью свести переговоры компании В к отрицательному результату с тем, чтобы занять место компании В в инвестировании.

Компания A для достижения своей цели (срыва переговоров компании В) может применить одно из средств: - предложить организаторам проектов более выгодные для них условия инвестирования и - представить в распоряжение организаторов проектов материалы, компрометирующие компанию B.

Стратегия компании A приводит к отрицательному результату переговоров компании B с организаторами проектов соответственно с вероятностями 0,7;0,5 и 0,3, а стратегия с вероятностями 0,6; 0,9 и 0,4.

Поскольку цели компаний A и B противоположны, то рассматриваемая конфликтная ситуация является антагонистической. Составьте платежную матрицу для данного примера, рассматривая в качестве выигрыша игрока А (или проигрыша игрока В) вероятность отрицательного результата переговоров компании В. Определите чистые стратегии компании A и В. Имеется ли для данной игры ***устойчивая*** ситуация (пара стратегий, от которых невыгодно отступать ни одной из компаний), т.е совпадают ли нижняя и верхняя цены игры ?

***Самостоятельное задание 1***

Два предприятия производят и поставляют продукцию на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции и полностью контролируют рынок данной продукции в регионе. Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением ***одной из трех*** различных технологий. В зависимости от экологичности технологического процесса и качества продукции, произведенной по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 12, 8 и 5 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции. Данные о цене реализации себестоимости приведены в таблице 1.

Таблица 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Технология | Цена реализации единицы продукции, д.е. | Полная себестоимость единицы продукции, д.е. | |
| Предприятие 1 | Предприятие 2 |
| I | 12 | 6 | 8 |
| II | 8 | 3 | 2 |
| III | 5 | 2 | 1 |

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию: Y = 6 – 0,5 X, где Y -количество продукции, которое приобретет население региона (тыс. ед.), а X - средняя цена продукции предприятий (д.е.).

Данные о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации приведены в таблице. Доля продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависит от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена, и соответствующие значения расположены в последнем столбце таблицы 2:

Таблица 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Цена реализации 1 ед. продукции, д.е. | | Средняя цена реализации 1 ед. продукции, д.е. | Спрос на продуцию, тыс. ед. | Доля продукции предприятия 1, купленной населением |
| Предприятие 1 | Предприятие 2 |
| 10 | 10 | 10 | 1 | 0,57 |
| 10 | 6 | 8 | 2 | 0,42 |
| 10 | 2 | 6 | 3 | 0,25 |
| 6 | 10 | 8 | 2 | 0,8 |
| 6 | 6 | 6 | 3 | 0,4 |
| 6 | 2 | 4 | 4 | 0,3 |
| 2 | 10 | 6 | 3 | 0,92 |
| 2 | 6 | 4 | 4 | 0,85 |
| 2 | 2 | 2 | 5 | 0,72 |

По условию задачи на рынке региона действует только 2 предприятия. Поэтому долю продукции второго предприятия, приобретенной населением, в зависимости от соотношения цен на продукцию можно определить как единица минус доля первого предприятия.

Стратегиями предприятий в данной задаче являются их решения относительно технологий производства продукции. Эти решения определяют ***себестоимость*** и ***цену реализации*** единицы продукции. В задаче необходимо определить:

* Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?
* Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?
* Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении?

Комментарии

Определим экономический смысл коэффициентов выигрышей в платежной матрице задачи. Каждое предприятие стремится к максимизации прибыли от производства продукции. Но, кроме того, предприятия ведут борьбу за рынок продукции в регионе. При этом ***выигрыш*** одного предприятия означает ***проигрыш*** другого. Такая задача может быть сведена к ***матричной игре с нулевой суммой***. При этом коэффициентами выигрышей будут значения ***разницы прибыли*** предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции. В случае, если эта разница положительна, выигрывает предприятие 1, а в случае, если она отрицательна — предприятие 2.

Рассчитаем коэффициенты выигрышей платежной матрицы. Для этого необходимо определить значения прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции.

Прибыль предприятия в данной задаче зависит: от цены и себестоимости продукции; количества продукции, приобретаемой населением региона; доли продукции, приобретенной населением у предприятия.

Таким образом, значения разницы прибыли предприятий, соответствующие коэффициентам платежной матрицы, необходимо определить по формуле:



где D — значение разницы прибыли от производства продукции предприятия 1 и предприятия;

p — доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением региона;

S — количество продукции, приобретаемой населением региона;

R1 и R2 — цены реализации единицы продукции предприятиями 1 и 2;

C1 и C2 — полная себестоимость единицы продукции, произведенной на предприятиях 1 и 2.

Вычислим один из коэффициентов платежной матрицы.

Пусть, например, предприятие 1 принимает решение о производстве продукции в соответствии с технологией I, а предприятие 2 — в соответствии с технологией III. Тогда цена реализации единицы. продукции для предприятия 1 составит 12 д.е. при себестоимости единицы. продукции 6 д.е. Для предприятия 2 цена реализации единицы. продукции составит 5 д.е. при себестоимости 1 д.е..

Количество продукции, которое население региона приобретет при средней цене 6 д.е., равно 3 тыс. ед. (таблица 2). Доля продукции, которую население приобретет у предприятия 1, составит 0,25, а у предприятия 2 — 0,75 (табл. 2). Вычислим коэффициент платежной матрицы a13 по формуле:



где i=1 — номер технологии первого предприятия, а j=3 — номер технологии второго предприятия.

Аналогично вычислите все оставшиеся коэффициенты платежной матрицы. Представьте результат в виде платежной матрицы следующего вида (здесь стратегии A1 - A3– представляют собой решения о технологиях производства продукции предприятием 1, стратегии B1- B3 — решения о технологиях производства продукции предприятием 2, коэффициенты выигрышей — разницу прибыли предприятия 1 и предприятия).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | Minj |
| A1 |  |  |  |  |
| A2 |  |  |  |  |
| A3 |  |  |  |  |
| Maxi |  |  |  |  |

Определите нижнюю и верхнюю цену игры. Совпадают ли они в данном случае? Если это так, то существует технология производства продукции, которая является оптимальной для обоих предприятий. Какие стратегии производства являются чистыми оптимальными стратегиями? Какое из предприятий выиграет в данной игре и какова величина этого выигрыша? Сколько при будет реализовано тысяч единиц продукции (реализация равна спросу на продукцию, таблица 2).

***Самостоятельное задание 2***

Фирма А рассматривает возможность вывода одного из трех производимых ею товаров на один из потенциально доступных рынков. В зависимости от того, на какой рынок она выйдет, ее конкурентом станет фирма B, C или D.

Предполагая, что в любом случае у фирмы А будет ***лишь один конкурент*** (B, C или D), имеющий ряд стратегий, определите цену игры и наиболее привлекательный для А рынок сбыта.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
| A1 | -2 | 0 | 3 | -1 | 1 |
| A2 | -1 | 5 | -2 | -2 | -1 |
| A3 | -3 | -4 | 0 | -2 | -2 |
| A4 | 3 | 5 | 3 | 3 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | C1 | C2 | C3 | C4 |
| A1 | 4 | -4 | -1 | 0 |
| A2 | 7 | 6 | 2 | 6 |
| A3 | 5 | 4 | -6 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | D1 | D2 | D3 | D4 |
| A1 | -6 | 5 | -3 | 2 |
| A2 | -3 | 4 | 3 | -6 |
| A3 | -3 | 7 | 5 | -3 |
| A4 | -3 | -1 | -4 | 8 |
| A5 | -6 | 1 | -6 | 5 |

Решение матричных игр в смешанных стратегиях с помощью линейной оптимизации

Оптимальные стратегии игроков в играх без седловых точек могут быть найдены путем решения пары двойственных задач линейной оптимизации.

|  |  |
| --- | --- |
| Определение стратегий игрока I | Определение стратегий игрока II |
|  |  |

Цена игры и вероятности применения стратегий игроками I и II равны:

******

***Пример 1.***

Найдите решение парной игры с заданной платежной матрицей, приведенной ниже. Решите задачу с помощью линейной оптимизации, определите цену игры и вероятности применения активных стратегий.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | 14 | 20 | 32 | 8 |
| A2 | 15 | 11 | 19 | 37 |
| A3 | 33 | 9 | 16 | 34 |

***Пример 2.***

Два конкурирующих предприятия имеют следующие доли общего сбыта своей продукции на местном рынке: 53% предприятие 1 и 47% – предприятие 2. Для увеличения объема своих продаж у них имеются следующие альтернативы:  – расширить сеть сбыта,  – увеличить затраты на рекламу своей продукции,  – расширить ассортимент,  – ничего не предпринимать.

Анализ показал, что при реализации обоими предприятиями указанных мероприятий доля (в %) предприятия на рынке изменится следующим образом:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Стратегия предприятия 1 | Стратегия предприятия 2 | | | |
|  |  |  |  |
|  | -4 | -5 | -1 | 6 |
|  | -1 | 0 | -3 | 5 |
|  | -3 | 1 | -5 | 5 |
|  | -8 | -7 | -6 | 0 |

Требуется сформулировать данную ситуацию в виде игры и определить оптимальные смешанные стратегии обоих предприятий.

***Решение.*** Обратите внимание, что в данном примере для обоих игроков имеются доминируемые стратегии. Найдите и исключите их из матрицы игры.

Затем необходимо избавиться от отрицательных значений элементов платежной матрицы. Для этого прибавьте к каждому элементы матрицы достаточно большое положительное число.

Запишите и решите прямую и двойственную задачи ЛП и определите вероятности применения чистых стратегий обоими игроками:

Вы должны получить следующий результат.

Цена игры, соответствующая первоначальной матрице, равна –2,2 (после того, как на начальном этапе мы прибавили ко всем элементам некоторое число, теперь необходимо его вычесть).

Предприятие 1 при многократном повторении игры должно использовать с частотой 0,4 стратегию  (расширить сеть сбыта), с частотой   
0,6 – стратегию – (расширение рекламной деятельности), а стратегии  (увеличить ассортимент) и  (ничего не предпринимать) не использовать вовсе. При этом доля сбыта предприятия на рынке ***уменьшится*** на 2,2%.

В свою очередь, оптимальная смешанная стратегия предприятия   
2 заключается в том, чтобы с частотой 0,4 использовать стратегию  (расширить сеть сбыта), и с частотой 0,6 – стратегию – (расширение ассортимента). Стратегии  (расширение рекламной деятельности) и  (ничего не предпринимать) не должны применяться. При этом доля сбыта предприятия 2 на рынке ***увеличится*** на 2,2%.

Казалось бы, поскольку даже в результате проведения своих мероприятий предприятие 1 “теряет рынок”, ему не следует ничего предпринимать, однако в этом случае оно потеряет еще больше (в соответствии   
со стратегией ) из-за действий предприятия 2, которому они выгодны.

***Определение выигрышей в игре без седловых точек***

Средний выигрыш игрока А в том случае, когда оба игрока применяют свои оптимальные смешанные стратегии (***функция выигрыша игрока А в смешанных стратегиях***) равен



где вектор-строка задает вероятности применения различных чистых стратегий первым игроком ,  - платежная матрица и  – вектор-столбец вероятностей применения чистых стратегий вторым игроком:



В тех случаях, когда один из игроков применяет чистую стратегию,   
а второй – смешанную, нужно “занулить” все вероятности, соответствующие неиспользуемым этим игроком стратегиям. Например, если первый игрок использует чистую стратегию , то для определения выигрыша достаточно заменить вектор  на вектор .

***Пример 3.*** Задана платежная матрица

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0 | 1/2 | 5/6 |
|  | 1 | 3/4 | 1/2 |

Пусть оптимальные смешанные стратегии игроков А и В уже определены:



Требуется определить выигрыши игрока А в ситуациях, когда

1. игрок В применяет смешанную стратегию;
2. игрок В применяет одну из чистых стратегий (,, или ).

Проанализируйте полученные результаты.